Séries de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

$c_n \in \mathbb{R}$ (coeficiente da série)

Podemos representar funções

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

onde x está no domínio de f se a série avaliada em x é convergente. Nesse caso, a imagem de f em x é o valor da soma da série.

Uma série de potências centrada em a é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

Independente dos coef., a série é convergente p/ $x = a$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (a-a)^n = c_0 + c_1(a-a) + c_2(a-a)^2 + \cdots = c_0 .$$

Exemplos: 1) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n = 0! + 1!\,x + 2!\,x^2 + 3!\,x^3 + \cdots$

$$= 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + \cdots$$

$x = 0$: $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,0^n = 1 + 0 + 2\cdot 0^2 + 6\cdot 0^3 + \cdots = 1$.

Aplicando o teste da razão:

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = \left|\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |(n+1)\cdot x|$$

$$= (n+1)\cdot|x| \xrightarrow{n\to\infty} \infty \quad \text{(o limite não existe)}$$

Assim, a série só converge p/ $x = 0$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ (centrado em 3)

$x = 3$, convergente.

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(x-3)^n}\right| = \left|\frac{n}{n+1}\cdot\frac{(x-3)^{n+1}}{(x-3)^n}\right| = \left|\frac{n}{n+1}\cdot(x-3)\right|$$

$$= \frac{n}{n+1}|x-3| \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}|x-3| \xrightarrow{n\to\infty} |x-3| \quad \begin{array}{l} < 1 \\ > 1 \\ = 1 \end{array}$$

$\underline{|x-3| < 1}$ $\quad$ $\underline{|x-3| > 1}$ $\quad$ $\underline{|x-3| = 1}$

$$|x| = \begin{cases} x, & \underline{x \geq 0} \\ -x, & \underline{x < 0} \end{cases}$$

- $|x-3| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-3 = 1, & x-3 \geq 0 \\ -(x-3) = 1, & x-3 < 0 \end{cases}$

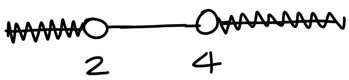
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4, & x \geq 3 \\ x-3 = -1, & x < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4, & x \geq 3 \checkmark \\ x = 2, & x < 3 \checkmark \end{cases} \therefore\ x = 4 \text{ ou } x = 2.$$

P/ $x = 4$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (harmônica) divergente.

P/ $x = 2$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-3)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (harm. alternada) convergente.

- $|x-3| > 1 \Rightarrow \begin{cases} x-3 > 1, & x-3 \geq 0 \\ -(x-3) > 1, & x-3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 4, & x \geq 3 \\ x-3 < -1, & x < 3 \end{cases}$

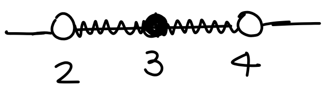
$$\Rightarrow \begin{cases} x > 4, & x \geq 3 \\ x < 2, & x < 3 \end{cases} \quad \therefore\ x > 4 \text{ ou } x < 2$$



Logo, a série diverge p/ $x > 4$ e $x < 2$.

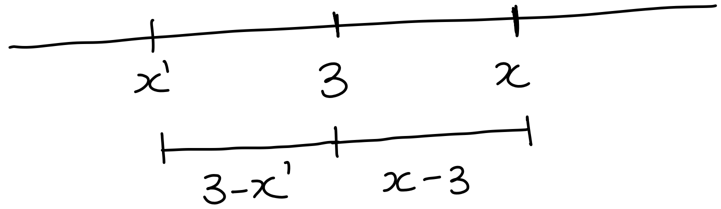
- $|x-3| < 1 \Rightarrow \begin{cases} x-3 < 1, & x-3 \geq 0 \\ -(x-3) < 1, & x-3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4, & x \geq 3 \\ x-3 > -1, & x < 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < 4, & x \geq 3 \\ x > 2, & x < 3 \end{cases} \quad \therefore\ 2 < x < 4$$



A série é convergente se $2 < x < 4$.

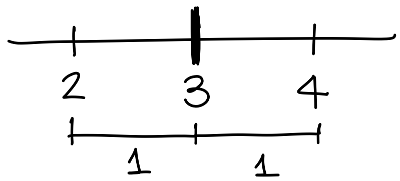
Portanto, a série é convergente se $x \in [2, 4)$.



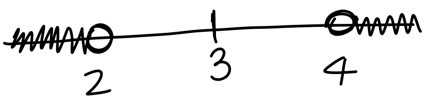
$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & x \geq 3 \\ -(x-3), & x<3 \end{cases} = \begin{cases} x-3, & x \geq 3 \\ 3-x, & x<3 \end{cases}$$

distância de x a 3.

$|x-3| = 1$



$|x-3| > 1$

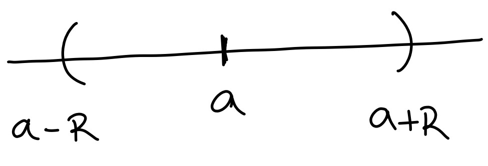


$|x-3| < 1$

Teorema: Para uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, só existe uma das três possibilidades abaixo:

1) A série só converge em $x=a$; $(R=0)$
2) A série converge para todo $x \in \mathbb{R}$; $(R=\infty)$
3) A série converge para $|x-a|<R$ e diverge para $|x-a|>R$.

$a =$ centro, $R =$ raio de convergência



intervalo de convergência.